インデックスに戻る

６．平面図形

６－１．三角形の性質

６－１－１．三角形の辺と角

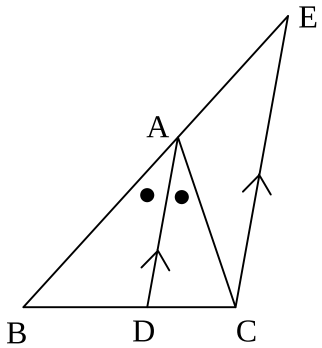
６－１－１－３．三角形の角の二等分線と線分の比

m、nを正の数とする。線分AB上の点PがAP : PB = $m : n$を満たすとき、点Pは線分ABを$m : n$に内分するという。また、線分ABの延長上の点QがAQ : QB = $m : n$を満たすとき、点Qは線分ABを$m : n$に外分するという。

三角形ABCの角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ。

三角形ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点は、辺BCをAB : ACに内分する。

［証明］



∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする。点Cを通り直線ADに平行な直線と直線ABとの交点をEとする。

AD // ECより

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{AEC}$ …①

$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{ACE}$ …②

ADは∠BACの二等分線であるから

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD}$ …③

①②③より

$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{ACE}$ …④

④より、三角形ACEは二等辺三角形であり、

$\mathrm{AC} = \mathrm{AE}$ …⑤

AD // CEより

$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AE}$ …⑥

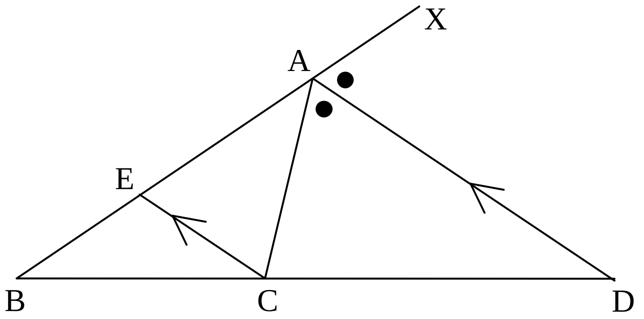
⑤⑥より

$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$

三角形の外角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ。

> $AB \neq AC$ を満たす三角形 ABC において、$\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は、辺 BC を $AB : AC$ に外分する。

［証明］



$AB > AC$ の場合について、証明する。 $AB < AC$ の場合についても、同様である。

$\angle A$ の外角の二等分線と、辺 BC の延長との交点を D とする。点 C を通り直線 AD に平行な直線と辺 AB との交点を E とする。また、辺 AB の A の側への延長上に点 X をとる。

$AD \,/\!/\, EC$ より

$\angle DAX = \angle AEC$ …①

$\angle DAC = \angle ACE$ …②

AD は $\angle A$ の外角 $\angle XAC$ を二等分するから、

$\angle DAX = \angle DAC$ …③

①②③より

$\angle AEC = \angle ACE$ …④

④より三角形 ACE は二等辺三角形であり、

$AC = AE$ …⑤

$AD \,/\!/\, EC$ より

$AB : AE = BD : DC$ …⑥

⑤⑥より

$AB : AC = BD : DC$

（注）

$AB = AC$ の場合、$\angle A$ の外角の二等分線と直線 BC とは平行である。

インデックスに戻る